Lycée
Saint-Exupéry
Marseille

Correction DS2

Exercice 1 [Etude de fonction]

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{4x+3}{x+2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et on note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. ***a.*** $f(x) = \dfrac{4x+3}{x+2} = \dfrac{x(4+\frac{3}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \dfrac{4+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{4}{1} = 4$ et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$

b. $\lim\limits_{x\to-2^-} 4x+3 = -5$ et $\lim\limits_{x\to-2^-} x+2 = 0^-$, donc $\lim\limits_{x\to-2^-} \; = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^+} 4x+3 = -5$ et $\lim\limits_{x\to-2^+} x+2 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to-2^+} \; = -\infty$

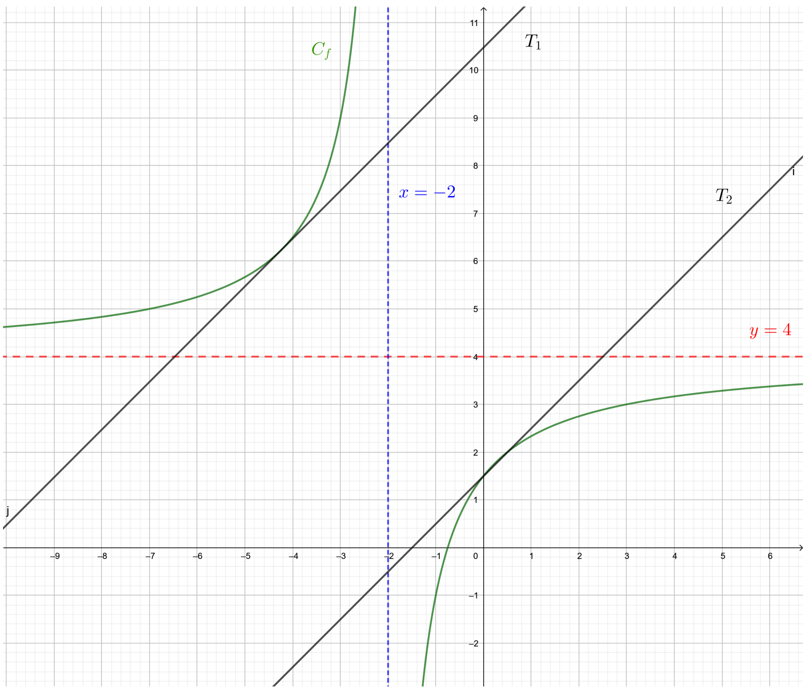
c. On en déduit graphiquement une asymptote horizontale d'équation $y = 4$ et une asymptote verticale d'équation $x = -2$

2. ***a.*** $f'(x) = \dfrac{4(x+2)-(4x+3)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{4x+8-4x-3}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2}$

b.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\vert\vert$	$+$	
$f(x)$	4	$\nearrow$	$+\infty$ $\vert\vert$ $-\infty$	$\nearrow$	4

3. Courbe et asymptotes :



4. Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $D : y = 4$, on étudie le signe $f(x) - 4$:

$$\begin{array}{rcl} f(x)-4 & = & \dfrac{4x+3}{x+2} - 4 \\ & = & \dfrac{4x+3}{x+2} - \dfrac{4(x+2)}{x+2} \\ & = & \dfrac{4x+3-4(x+2)}{x+2} \\ & = & \dfrac{4x+3-4x-8}{x+2} \\ & = & \dfrac{-5}{x+2} \end{array}$$

et donc :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
-5	$-$		$-$
$x+2$	$-$	0	$+$
$f(x)-4$	$+$	$\|\|$	$-$

Donc, C_f est au dessus de D sur $]-\infty;-2[$ et passe en dessous sur $]-2;+\infty[$ (comme observé sur la figure).

5. On admet qu'il existe deux tangentes à $\mathcal{C}_f$, T_1 et T_2 (en x_1 et x_2) de coefficient directeur valant 1 :

a. Pour trouver x_1 et x_2, on résout l'équation $f'(x) = 1$ avec $x \neq -2$:

$$\begin{array}{rccc} & f'(x) & = & 1 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{5}{(x+2)^2} & = & 1 \\ \Leftrightarrow & 5 & = & (x+2)^2 \\ \Leftrightarrow & 5 & = & x^2+4x+4 \\ \Leftrightarrow & x^2+4x-1 & = & 0 \end{array}$$

Calcul du discriminant : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 20$ (deux solutions x_1 et x_2).

$x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{20}}{2} = -2-\sqrt{5}$ et $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{20}}{2} = -2+\sqrt{5}$

b. On rappelle les formules : $T_1 : y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ et $T_2 : y = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$

On sait déjà que $f'(x_1) = f'(x_2) = 1$.

Calcul de $f(x_1)$:

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) & = & \frac{4x_1+3}{x_1+2} \\ & = & \frac{4(-2-\sqrt{5})+3}{-2-\sqrt{5}+2} \\ & = & \frac{-8-4\sqrt{5}+3}{-\sqrt{5}} \\ & = & \frac{-5-4\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} \\ & = & \frac{5}{\sqrt{5}}+4 \\ & = & \sqrt{5}+4 \end{array}$$

Calcul de $f(x_2)$:

$$\begin{array}{rcl} f(x_2) & = & \frac{4x_2+3}{x_2+2} \\ & = & \frac{4(-2+\sqrt{5})+3}{-2+\sqrt{5}+2} \\ & = & \frac{-8+4\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}} \\ & = & \frac{-5+4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ & = & \frac{-5}{\sqrt{5}}+4 \\ & = & -\sqrt{5}+4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} T_1 : & y = 1 \times (x-(-2-\sqrt{5})) + 4 + \sqrt{5} \\ : & y = x+2+\sqrt{5}+4+\sqrt{5} \\ T_1 : & y = x+6+2\sqrt{5} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} T_2 : & y = 1 \times (x-(-2+\sqrt{5})) + 4 - \sqrt{5} \\ : & y = x+2-\sqrt{5}+4-\sqrt{5} \\ T_2 : & y = x+6-2\sqrt{5} \end{array}$$

Exercice 2 [Polynômes et géométrie]

$$(E) : z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

1. 1 est une solution évidente : $1^4 + 2 \times 1^3 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$

2. On développe :

$$\begin{array}{rl} & (z^2+z-2)(z^2+z+1) \\ = & z^4+z^3+z^2+z^3+z^2+z-2z^2-2z-2 \\ = & z^4+2z^3-z-2 \\ = & z^4+2z^3-z-2 \end{array}$$

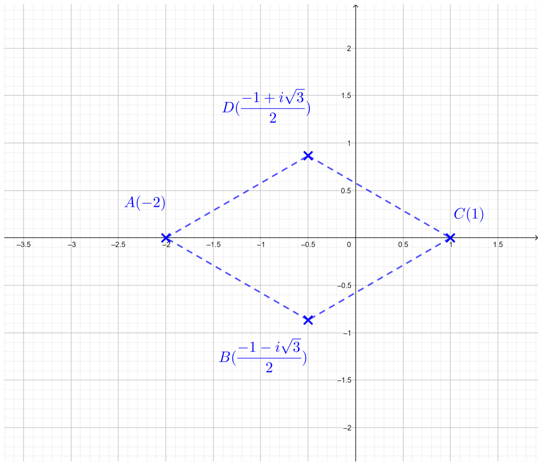
3. On résoud d'abord l'équation $z^2 + z - 2 = 0$: $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$ deux solutions réelles x_1 et x_2 : $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$ On résoud ensuite l'équation $z^2 + z + 1 = 0$: $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$ deux solutions complexesz_1 et z_2 :

$z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

L'ensemble des solutions complexes de (E) est $\mathcal{S} = \{-2; 1; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\}$

4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A,B,C,D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé.

a. Points A, B, C, D :



b. $ABCD$ est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu. En effet :
Soit M le milieu de $[AC]$. $z_M = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{-2+1}{2} = \frac{-1}{2}$
Soit N le milieu de $[BD]$. $z_N = \frac{z_B+z_D}{2} = \frac{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{-1}{2}+\frac{-1}{2}}{2} = \frac{-1}{2}$

Exercice 3 [Nombres Complexes]

Partie A - Question de cours

Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ deux nombres complexes. D'une part :

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)} \\ &= \overline{x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2} \\ &= \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)} \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)} \\ &= (x_1-iy_1)(x_2-iy_2) \\ &= (x_1-iy_1)(x_2-iy_2) \\ &= x_1x_2 - ix_1y_2 - ix_2y_1 - y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

Partie B - Étude d'une transformation particulière

a.

$$\begin{aligned} z_C &= -2+i \\ z'_C &= \frac{1-z_C}{\overline{z_C}-1} \\ &= \frac{1-(-2+i)}{\overline{(-2+i)}-1} \\ &= \frac{1+2-i}{(-2-i)-1} \\ &= \frac{3-i}{-3-i} \\ &= \frac{(3-i)(-3+i)}{9+1} \\ &= \frac{-(9-6i-1)}{9+1} \\ &= \frac{-(8-6i)}{10} \\ z'_C &= \frac{-4+3i}{5} \end{aligned}$$

b. On calcule les affixes des vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{AC'}$:

$$\begin{aligned} z_{AC} &= z_C - z_A \\ &= -2+i-1 \\ &= -3+i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z_{AC'} &= z'_C - z_A \\ &= \frac{-4+3i}{5} - 1 \\ &= \frac{-4+3i-5}{5} \\ &= \frac{-9+3i}{5} \\ &= \frac{3}{5}(-3+i) \\ &= \frac{3}{5}z_{AC} \end{aligned}$$

Donc $\vec{AC}$ et $\vec{AC'}$ sont colinéaires, donc les points A, C, C' alignés.

c. C' est le milieu de $[BD]$. On cherche l'affixe de D :

$$\begin{aligned} && z_{C'} &= \frac{z_B+z_D}{2} \\ \Leftrightarrow && \frac{-4+3i}{5} &= \frac{-1+z_D}{2} \\ \Leftrightarrow && 2 \times \frac{-4+3i}{5} &= -1+z_D \\ \Leftrightarrow && \frac{-8+6i}{5}+1 &= z_D \\ \Leftrightarrow && z_D &= \frac{-8+6i+5}{5} \\ \Leftrightarrow && z_D &= \frac{-3+6i}{5} \end{aligned}$$

1. a. On commence par rappeler que pour tout $z = x + iy$ complexe, $z\overline{z} = x^2 + y^2$ est réel, et $z + \overline{z} = 2x$ est réel.
Soit $z \neq 1$:

$$\begin{array}{rcl} \frac{z'-1}{z-1} & = & \frac{\frac{1-z}{\overline{z}-1}-1}{z-1} \\ & = & \frac{-1}{\overline{z}-1} - \frac{1}{z-1} \\ & = & \frac{1}{1-\overline{z}} + \frac{1}{1-z} \\ & = & \frac{1-z+1-\overline{z}}{(1-\overline{z})(1-z)} \\ & = & \frac{2-(z+\overline{z})}{(\overline{1-z})(1-z)} \end{array}$$

$2 - (z + \overline{z})$ et $(\overline{1-z})(1-z)$ sont réels d'après la remarque précédente. Donc $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel.

b. D'après la question précédente, on pose k un réel tel que $\frac{z'-1}{z-1} = k$.
Et donc :

$$z' - 1 = k(z - 1)$$

On reconnaît les affixes des points M, M' et A : $z'_M - z_A = k(z_M - z_A)$
On reconnaît les affixes des vecteurs $\vec{AM'}$ et $\vec{AM}$:

$$z_{AM'} = kz_{AM}$$

Donc $\vec{AM'}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires, donc M, M' et A sont alignés.

2. Soit $M(z)$ qui a pour image $A(1)$ par la transformation f. C'est à dire que $z'_M = z_A = 1$:

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{1-z}{\overline{z}-1} & = & 1 \\ \Leftrightarrow & 1 - z & = & \overline{z} - 1 \\ \Leftrightarrow & 1 - (x + iy) & = & x - iy - 1 \\ \Leftrightarrow & 1 - x - iy & = & x - iy - 1 \\ \Leftrightarrow & 2 & = & 2x \\ \Leftrightarrow & x & = & 1 \end{array}$$

Δ est l'ensemble des points différents de A dont la partie réelle de l'affixe vaut 1. Autrement dit, Δ est la droite d'équation $x = 1$ privée de A.